**Оглавление**

[Введение . …………………………5](#_Toc451069915)

[Глава I. Последовательности и функции …………………………7](#_Toc451069916)

[1. Функции, числа, последовательности 7](#_Toc451069917)

[Упражнения 11](#_Toc451069918)

[2. Предел последовательности 12](#_Toc451069919)

[Упражнения 15](#_Toc451069920)

[3. Предел функции 15](#_Toc451069921)

[Упражнения 21](#_Toc451069922)

[4. Непрерывность 22](#_Toc451069923)

[Упражнения 25](#_Toc451069924)

[Глава II. Дифференциальное исчисление ………………………………26](#_Toc451069925)

[1. Производная функции 26](#_Toc451069926)

[Упражнения 34](#_Toc451069927)

[2. Дифференцирование функции. Дифференциал 34](#_Toc451069928)

[Упражнения 37](#_Toc451069929)

[3. Теоремы о дифференцируемых функциях 38](#_Toc451069930)

[Упражнения 44](#_Toc451069931)

[4. Приложения дифференцирования в геометрии и вычислительной математике 44](#_Toc451069932)

[Упражнения 48](#_Toc451069933)

[5. Исследование функций и построение графиков 49](#_Toc451069934)

[Упражнения 59](#_Toc451069935)

[Глава III. Функция нескольких переменных …………………………....60](#_Toc451069936)

[1. Понятия функции нескольких переменных, ее предела и непрерывности 60](#_Toc451069937)

[Упражнения 63](#_Toc451069938)

[2. Частная производная функции нескольких переменных 63](#_Toc451069939)

[Упражнения 65](#_Toc451069940)

[3. Дифференцируемость функции нескольких переменных 66](#_Toc451069941)

[Упражнения 71](#_Toc451069942)

[4. Экстремум функции нескольких переменных 72](#_Toc451069943)

[Упражнения 76](#_Toc451069944)

[5. Скалярное поле 76](#_Toc451069945)

[Упражнения 80](#_Toc451069946)

[Заключение …………………81](#_Toc451069947)

[БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК …………………82](#_Toc451069948)

# Введение

Изучение курса математического анализа является обязательной составляющей подготовки инженеров-программистов и специалистов по информационным технологиям. Это обусловлено тем, что практически все задачи, которые ставятся перед специалистами в области информационных технологий, формулируются в терминах математических моделей объектов, а математический анализ является базой и основой для построения, описания и изучения таких моделей. В частности, все случаи описания систем с непрерывным временем приводят к необходимости использования методов дифференциального и интегрального исчислений. То же самое можно сказать о моделировании движения систем с большим числом элементарных объектов, а также об управлении и автоматизации в таких системах.

Настоящее учебное пособие состоит из двух частей и имеет цель помочь студентам в формировании устойчивого понимания основ математического анализа и практических умений в применении его методов для решения задач моделирования, автоматизации и управления, а также познакомиться с иллюстрирующими методы и приемы решения задач примерами.

Настоящая первая часть учебного пособия посвящена теории пределов и дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных. Материал, изложенный в этой части, изучается в ходе первого семестра обучения по программе бакалавриата. Для изучения материала этой части, в основном, достаточно знаний в объеме программы средней общеобразовательной школы. Лишь при изучении тем, связанных с функциями многих переменных, а также со скалярными полями, требуются знания линейной алгебры и аналитической геометрии в объеме курса, читаемого в первом семестре по программе высшей школы. В некоторых темах также требуются знания о комплексных числах и многочленах, изучение которых запланировано программой до изучения материала настоящего пособия (соответствующее методическое пособие [1] уже имеется).

Примеры, приведенные и разобранные в тексте пособия, позволяют научиться решать задачи – вычислять пределы, производные и применять их в задачах механики, геометрии, физики и даже информатики. Однако, для выработки навыков решения задач и приобретения уверенности в своих знаниях, необходимо решить множество подобных задач самостоятельно, взяв их из специализированных задачников, например, [4].

Две части настоящего учебного пособия, совместно с существующими учебными пособиями Е.Н.Сергиенко «Комплексные числа» и «Дифференциальные уравнения», покрывают весь курс математического анализа, читаемый в БГТУ им. В.Г. Шухова для студентов специальностей «информатика и вычислительная техника» и «программная инженерия». Однако, сведения в учебных пособиях можно назвать краткими и больше ориентированными на описание основных методов с целью облегчить их понимание и практическое применение. Более глубокие знания студенту следует получить из источников, которые указаны в Библиографических списках в конце каждой из частей.

Для облегчения поиска по ссылкам, применяется тройная нумерация теорем, примеров и формул. Например, ссылка (4.3.11) означает, что имеется в виду формула 11 из параграфа 3 главы 4. В учебном пособии применяется сквозная нумерация глав: первая часть содержит главы с 1 по 3, а вторая – главы с 4 по 7. Знаком ■ обозначен конец доказательства теоремы. Знаком □ обозначается окончание рассмотрения примера.

Ответы и указания для задач, приведенных в тексте пособия, публикуются отдельно в электронном виде. Соответствующие ссылки будут приведены в конце второй части пособия.

# Глава I. Последовательности и функции

## 1. Функции, числа, последовательности

**Множества и функции**. Любой набор элементов произвольной природы называется *множеством*. Если элементам одного множества сопоставлены элементы другого множества , то говорят, что задано *отображение* из в .

Обозначения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | - элемент множества |  | Множество, состоящее из элементов, содержащихся и в , и одновременно |
|  | не элемент |  | Множество, состоящее из элементов, содержащихся или в , или |
|  | Все элементы содержатся в |  | Множество элементов вида . Называется *прямое произведение*. |
|  | Множество содержится в или совпадает с ним |  | Множество из элементов множества , не содержащихся в |

Отображение , при котором каждому элементу множества сопоставлен один элемент множества , называется *функцией* или *отображением множества*  ***в*** *.* В этом случае множество называется *областью определения* функции .

Подмножество состоящее из элементов вида   
 называется *образом* множества для функции . Подмножество такое, что элементы образуют множество , называется *полным прообразом* множества по отношению к функции .

Если и – два множества, то отображение такое, что для называется *инъекцией*. Отображение называется *сюръекцией*, если образом множества для является . Если отображение является и инъекцией, и сюръекцией одновременно, то оно называется *биекцией*.

Два множества называются *равномощными*, если между ними существует биекция.

**Пример 1.1.1**. *Образом отрезка для функции является отрезок* . □

**Пример 1.1.2**. *Полным прообразом отрезка для функции является вся числовая прямая*. □

**Пример 1.1.3**. *Отображение , является сюръекцией, но не является инъекцией: для различных значений можно получить одно и то же значение*  □

**Пример 1.1.4**. *Отображение не является ни сюръекцией, ни инъекцией: нет такого вещественного , для которого принимает отрицательное значение* □

**Пример 1.1.5**. *Множества и равномощны: между ними существует биекция □*

**Числа**. Рассмотрим множество , состоящее из элементов , которые сами являются множествами: . Пусть для множеств определены некоторые операции «» и «» (условные сложение и умножение, соответственно) такие, что для любых и из , результаты операций и также принадлежат множеству . Если, кроме этого, в множестве имеются такие элементы и , что для любого : , и то символы, обозначающие множества , называются *числами.*

**Пример 1.1.6**. *Если в качестве взять любой предмет, а в качестве брать прямые произведения на себя произвольное количество раз, то получим множество натуральных чисел . Для полного соответствия с данным выше определением нужно добавить элемент* (*нуль*)*, соответствующий отсутствию предмета. Элементы полученного множества можно представлять арабскими или римскими числами. Сложение и умножение определяются естественным образом. □*

**Пример 1.1.7**. *Пусть – любой имеющийся в наличии предмет, а в качестве элемента обозначим элемент, означающий нехватку предмета . В качестве будем брать прямые произведения на себя произвольное количество раз и аналогично построим множества Добавим нуль и получим множество целых чисел . □*

Легко увидеть, что множества рациональных чисел и действительных чисел можно построить таким же путем. Мало того, так же строятся множества комплексных чисел, *кватернионов*, *октав* и т.д.

Если какое-либо отображение связывает два множества чисел, то оно называется *числовым отображением*.

**Последовательности**. Отображение из множества натуральных чисел в произвольное множество называется *последовательностью*. Большинство задач, с которыми сталкиваются специалисты по информационным технологиям, связаны с числовыми последовательностями и функциями. Поэтому далее будем рассматривать только их и под словами «последовательность» и «функция» будем понимать именно числовые отображения.

Традиционно последовательность обозначается как Элементы называются *членами последовательности*. Числовые последовательности задаются следующими способами:

*Аналитически*. Задается формула каждого члена последовательности, например .

*Рекуррентно*. Каждый следующий член последовательности определяется через предыдущий. Например, геометрическая прогрессия где - некоторое число, называемое знаменателем прогрессии.

*Описательно*. Например, последовательность простых чисел 1,2,3,5,7,11,… или последовательность цифр в записи числа .

Если множество чисел таково, что для любого его элемента можно сказать, что он либо больше, либо меньше нуля, то говорят, что на этом множестве задано *сравнение* чисел. Например, на множествах имеется сравнение, а на множествах его нет.

Если числовая последовательность задана на множестве чисел, для которых определено сравнение, и существует такое число что для любого , то говорят, что последовательность *ограничена снизу*. Если же существует число такое что для любого , то говорят, что последовательность *ограничена сверху*. Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то ее называют просто *ограниченной*.

Последовательность называется *бесконечно малой*, если

**Пример 1.1.8**. *Последовательность , является бесконечно малой и ограниченной* □

**Пример 1.1.9**. *Последовательность , является бесконечно малой: действительно, . Эта последовательность ограничена. Хотя, если бы было возможно казалось бы, последовательность стала бы ограниченной только снизу. Но первый член последовательности не существует по определению функции натурального логарифма.* □

Бесконечно малые последовательности (б.м.п.) обладают следующими свойствами:

1. *Сумма и разность б.м.п. является б.м.п***.** Доказательство. Пусть и есть две б.м.п. Тогда и . Значит, для последовательностей имеем, соответственно, так как .
2. *Б.м.п. ограничена*: если , то для получим
3. *Если есть б.м.п., а - ограниченная последовательность, то есть б.м.п*. Легко доказать, заменив все на верхнюю грань множества .
4. *Если все элементы б.м.п., начиная с некоторого номера, равны друг другу, то они равны нулю*. Доказывается от противного: если они не равны нулю, то нельзя сделать элементы последовательности меньше любого заданного числа.
5. *Для каждой б.м.п.* *определена последовательность* , *для которой справедливо* Последовательность называется *бесконечно большой*. Обратно, для каждой бесконечно большой последовательности указанным способом можно получить б.м.п.

**Способы задания функций**. Функцию можно задать *аналитически*, *графически* и *неявно*. Опишем каждый способ.

Аналитическое задание предполагает наличие формулы для образа точки из области определения функции. Если точка представляет собой действительное число, то формула может иметь привычный нам вид: и тому подобное. В этом случае будем говорить о *функции одной действительной переменной* (кратко просто «функция»). Если вещественная функция задана аналитически на множестве пар вещественных чисел , то формула может иметь вид , и подобные им. В этом случае функция называется функцией двух переменных. Понятно, что так же можно определить функцию любого числа переменных.

Графическое задание функции – это определение значений функции по ее графику. *Графиком функции* называется линия в координатной системе на плоскости, для которой одна из координат (в декартовом случае обычно абсцисса) представляет собой независимую переменную , а другая – зависимую переменную Тем самым, графиком может определяться набор пар , для которых справедливо, что является образом по отношению к . Чтобы график представлял функцию, необходимо чтобы любая прямая, параллельная оси ординат, пересекала его не более одного раза.

Неявное задание функции подразумевает наличие аналитической зависимости между переменными, но ни одна из переменных не выражена через другую. Например, функция может быть задана неявно формулой

Если задана функция , то функция такая, что называется *обратной функцией* для

**Пример 1.1.8**. *Выпишите аргументы и целые значения функции, обратной для функции на интервале*  Так как исследуем обратную функцию к данной, то следует поменять в ней местами аргумент и значение. Аналитическое выражение для искомой функции найти затруднительно. Поэтому просто подставим вместо значения 0,1,2 и 3 и определим , который будет теперь аргументом искомой функции. Имеем:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Аргумент () | 0 |  |  |  |
| Значение функции () | 0 | 1 | 2 | 3 |

Вычисляя приближенные значения, найдем

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Аргумент () | 0 |  |  |  |
| Значение функции () | 0 | 1 | 2 | 3 |

Упорядочив по возрастанию значение аргумента, будем иметь

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Аргумент () | 0 |  |  |  |
| Значение функции () | 0 | 3 | 2 | 1 |

Однако, восстановить график функции без дополнительного исследования пока не получится – мы не знаем как ведет себя функция между указанными значениями аргумента. □

### Упражнения

**1.1.1 Покажите, что множества**

а) 3-значных двоичных кодов б) 2-значных восьмеричных кодов; в) 1-значных 16-ричных кодов; г) 3-значных троичных кодов

**являются множествами чисел.**

**1.1.2.** **Выпишите первые 5 членов последовательности:**

а) ; б) ; в) ; г) .

**1.1.3.** **Задайте аналитически последовательность:**

а) четных чисел; б) нечетных чисел; в) чисел, делящихся на 3; г) чисел, делящихся на 7.

**1.1.4.** **Задайте аналитически обратную для функции:**

а) ; б) ; в) ; г)

**и укажите ее область определения**.

## 2. Предел последовательности

**Предел.** Важной характеристикой числовой последовательности является ее предел.

Число называется *пределом числовой последовательности* , если для любого найдется натуральное число такое, что для всякого выполняется В этом случае пишут

Иногда используется короткое обозначение . Устно говорят, что *стремится* к (или *сходится* к ).

Иными словами, последовательность сходится к заданному числу , если начиная с некоторого номера члена последовательности, все последующие члены отличаются от меньше, чем на любое наперед заданное число.

Ясно, что предел любой б.м.п. равен нулю.

**Пример 1.2.1**. *Докажем, что*  Выберем для любого число . Очевидно, . Тогда для всякого , что и требовалось доказать. □

**Пример 1.2.2**. *Докажем, что*  Заметим, что

и для любого натурального Выберем для любого число . Очевидно, . Тогда для всякого , а это значит

что и требовалось доказать. □

Очевидно, что у последовательности не может быть двух различных пределов: иначе определению предела никак нельзя удовлетворить при меньшем, чем модуль разности этих двух чисел.

По той же причине справедливо свойство «зажатой» последовательности: если , и (или ), то . Это *третий признак существования предела последовательности*.

*Первый признак существования предела последовательности* называется *критерием Коши* – он устанавливает необходимое и достаточное условие существования предела последовательности: последовательность сходится тогда и только тогда, когда

*Второй признак существования предела последовательности* устанавливается теоремой Вейерштрасса: если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел. Аналогичное утверждение имеет место для монотонно убывающей последовательности.

Имеет место еще такое свойство ограниченной последовательности: если последовательность имеет предел, то существует положительное число такое, что для любого справедливо , то есть, она ограничена. Доказательство аналогично приведенному выше доказательству для б.м.п.

Над последовательностями определены арифметические операции. Например, последовательность обозначается и является последовательностью, члены которой суть произведения членов последовательностей и с одинаковыми номерами.

Если последовательности и имеют пределы и , соответственно, то

**Пример 1.2.3**. *Вычислим пределы последовательностей , и .*

Последовательность не будет сходиться, если Это следует из того, что модули членов последовательности в этом случае будут неограниченно возрастать с увеличением . Если , то легко видеть, что члены последовательности с увеличением могут быть сделаны сколь угодно малыми по модулю. А это значит, что в этом случае

В случае последовательности , ясно, что показатель степени будет стремиться к нулю. Таким образом, .

Чтобы вычислить предел последовательности , произведем с нею небольшие алгебраические преобразования:

Далее, так как , получаем

Предел последовательности вычисляется, если принять во внимание вычисленный ранее предел последовательности (он равен 0). Заменяя в последовательности индекс на , придем к последовательности . Это означает, что последовательность совпадает с последовательностью без первого члена. Но отсутствие первого члена не влияет на предел последовательности. Поэтому .□

**Язык кванторов**. Для упрощения изложения доказательств в математическом анализе используются следующие символы (*кванторы*):

- существует, - не существует, - существует единственный;

- любой;

: - такой(ая,ие), что …

- пустое множество;

- следует;

- принадлежит, - не принадлежит

и другие.

С помощью кванторов легко записываются определения и доказательства в теории пределов и функций. Например, определение предела теперь умещается в одной строке:

Мало того, можно записать условие отсутствия предела у последовательности :

**Свойства пределов последовательности**. Запишем свойства пределов, используемые для их вычисления, на языке кванторов.

1. Каждая ограниченная последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью:

Последовательность называется *монотонной*, если для ее членов справедливо или для любого

1. Ограниченная монотонная последовательность сходится: или

Последовательность называется *фундаментальной*, если

1. Критерий Коши: для сходимости последовательности необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной:

В соответствии со свойством 2, последовательность

сходится. Действительно: легко проверить, что она монотонна и ограничена. Предел этой последовательности обозначается через и служит основанием натуральных логарифмов.

Если для последовательности имеет место утверждение , то говорят, что эта *последовательность стремится к бесконечности*, то есть . Знак выбирается в соответствии со знаком членов последовательности , .

### Упражнения

**1.2.1 Найдите пределы последовательностей:**

а) ; б) ; в) ; г)

**1.2.2.** **Докажите, что последовательности:**

а) ; б) ; в) ; г)

**не сходятся и не стремятся к бесконечности (говорят, что они *не имеют предела*).**

**1.2.3\*. Докажите, что последовательность , где**  – **-ое простое число, сходится к нулю.**

## 3. Предел функции

**Предел функции в точке**. Рассмотрим некоторое множество . Множество называется *открытым*, если для каждого числа существует такое число что С целью дальнейшего обобщения удобно называть элементы множеств *точками*. До тех пор пока речь идет только об , точка и число будут синонимами. *Окрестностью* точки называется любой интервал содержащий точку . Множество называется *проколотой окрестностью* точки .

Точка , принадлежащая или не принадлежащая открытому множеству , называется *предельной точкой множества* , если каждая проколотая окрестность точки содержит бесконечно много точек из .

**Теорема Вейерштрасса** (о предельных точках). *Любое бесконечное ограниченное подмножество множества действительных чисел содержит хотя бы одну предельную точку*.

(Без доказательства). ■

Пусть имеется функция () и - предельная точка множества . Число называется *пределом функции* в точке , если из того, что последовательность , члены которой лежат в , сходится к , следует, что сходится к . Обозначение:

В соответствии с данным определением, возникает *способ раскрытия неопределенности* для предела функции в точке: достаточно найти подходящую последовательность.

Есть альтернативная формулировка предела функции в точке: если имеется функция () и - предельная точка множества и , то

**Пример 1.3.1**. *Покажем, что* В силу того, что находим

и, с учетом свойства 2, получим значение предела, равное . .□

**Пример 1.3.2**. *Покажем, что* *не существует*. В силу основного определения предела функции, выберем сходящуюся последовательность Эта последовательность сходится к нулю. Так как последовательность не имеет предела (см. упражнение 1.2.2), то не существует и предела .□

**Свойства предела функции**. Свойства предела функции сходны со свойствами предела последовательности. Перечислим их.

1. Предел функции в точке единственен.
2. Если то существует окрестность точки такая, что ограничена на множестве , где – область определения функции.
3. Пусть и Тогда

**Критерий Коши существования предела функции в точке**. Пусть () и - предельная точка множества . Предел существует тогда и только тогда, когда

**Замечательные пределы**.

1. Рассмотрим предел

Построив круговой сектор в радиан и прямоугольный треугольник с катетом на одном радиусе и гипотенузой, являющейся продолжением другого радиуса, найдем: . Отсюда следует

Пределы при функций, стоящих слева и справа в последнем выражении, известны и равны 1. Следовательно,

Это выражение называется *первым замечательным пределом*. Из него легко получить часто используемое следствие:

1. Ранее рассматривался предел последовательности

Рассмотрим предел функции

Взяв в качестве сходящейся к нулю последовательности и подставив ее в функцию в пределе, найдем

Это – *второй замечательный предел*:

Из второго замечательного предела легко вытекает следствие:

которое иногда (но не общепринято) называется третьим замечательным пределом. Покажите, в качестве упражнения, что знаки модулей из последнего выражения можно устранить.

**Односторонние пределы**. Пусть () и - предельная точка множества . Число называется *пределом функции в точке справа* (пишут ), если

Если

то число называется *пределом функции в точке слева* (пишут ).

В случае, если в качестве фигурирует бесконечная точка ( или ), то определение предела для выглядит так:

а для имеет вид:

**Пример 1.3.3**. *Вычислим предел* . Выполним преобразования:

Выберем сходящуюся последовательность Эта последовательность сходится к числу 3. Последовательность

сходится к 1, так как .Значит,

В действительности, к этому результату можно было прийти сразу: так как функция не обращается в бесконечность в точке и определена в окрестности этой точки, то можно было просто подставить значение 3 вместо и получить 2. □

**Пример 1.3.4**. *Вычислим* . Имеем

Функция в последнем пределе определена в точке , а также в ее окрестности. Тем самым, подставив значение 10 вместо , найдем

□

**Пример 1.3.5**. *Используя первый замечательный предел, найдем* . Заменим переменную: пусть Тогда

□

**Пример 1.3.6**. *Используя второй замечательный предел, найдем* . При число представляется пределом:

и

Исходим из того, что искомый предел существует. Тогда

Введем переменную и заметим, что при имеем Далее запишем и тогда

□

**Бесконечно малые и бесконечно большие величины**. Выше было дано определение бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. Дадим аналогичное определение для функций. Пусть () и – предельная точка множества . Если

то функция называется *бесконечно малой* при . В случае

функция называется *бесконечно большой* при . Рассмотрим сравнение бесконечно малых функций между собой. Пусть и есть две функции, бесконечно малые при . Сравнение их между собой определим следующей таблицей:

|  |  |
| --- | --- |
| Значение | Результат сравнения |
|  | является *бесконечно малой высшего порядка*, чем ( является *бесконечно малой низшего порядка*, чем ) |
|  | и являются *бесконечно малыми одного порядка* |
|  | является бесконечно малой низшего порядка, чем ( является бесконечно малой высшего порядка, чем ) |

Бесконечно малые и называются *эквивалентными бесконечно малыми величинами*, если

Бесконечно малая называется *бесконечно малой го порядка относительно бесконечно малой* , если и являются бесконечно малыми одного порядка*.*

Легко обобщить данные определения на случай бесконечно больших величин: в таблице слово «малая» изменится на «большая» и поменяются результаты сравнения в первой и третьей строках. В остальных случаях – только замена «малая» на «большая».

Если предел не существует, то величины и называются *несравнимыми*.

Определение эквивалентных величин дает возможность заменять функцию ее эквивалентной при вычислении пределов.

**Пример 1.3.7**. *Вычислим* . Из первого замечательного предела: при . В то же время,

и, так как то . Теперь ясно, что

□

**Пример 1.3.8**. *Вычислим* . Представим в виде эквивалентной при функции

Теперь исходный предел имеет вид

Используем третий замечательный предел:

и найдем в итоге

□

### Упражнения

**1.3.1 Вычислите пределы функций в точке:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

**1.3.2 Вычислите пределы от иррациональных выражений:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

**1.3.3 Вычислите с использованием первого замечательного предела:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

**1.3.4 Вычислите с использованием второго замечательного предела:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

**1.3.5 Вычислите с использованием эквивалентности бесконечно малых:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

## 4. Непрерывность

**Непрерывность функции в точке**. Пусть () и – неизолированная точка множества - в каждой ее окрестности имеются точки из . Функцияназывается *непрерывной в точке* , если

Иначе говоря, для непрерывной в точке функции имеет место равенство:

**Свойства функций, непрерывных в точке**.

1. Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.
2. Если непрерывна в и то сохраняет знак числа в некоторой окрестности точки .
3. Если и непрерывны в точке , то функции и непрерывны в точке .
4. Если непрерывна в точке и задана функция , причем и непрерывна в точке то композиция функций непрерывна в точке .

**Непрерывность функции на множестве**. **Точки разрыва**. Функция называется *непрерывной на множестве* если она непрерывна в каждой точке множества . Если эта функция непрерывна на всей области определения, она называется просто *непрерывной функцией*.

Примеры непрерывных функций:

и вообще все линейные комбинации полиномиальных, экспоненциальных и тригонометрических функций.

Точка называется *точкой разрыва* функции , если функция не является непрерывной в . Если при этом существуют конечные пределы

и хотя бы один из них отличен от , то точка разрыва классифицируется как *1-го рода*. Если точка разрыва не 1-го рода, то она считается точкой разрыва *2-го рода*.

**Пример 1.4.1**. *Найдем все точки разрыва функции*

Очевидно, что функция имеет особенности при и В случае пределы слева и справа равны друг другу и равны 1 (первый замечательный предел), но не равны значению функции (0). Имеем точку разрыва 1-го рода.

Во втором случае знаменатель не равен 0, а числитель обращается в бесконечность, то есть пределы слева и справа не являются конечными. Значит, в этих точках функция терпит разрыв 2-го рода. □

Перечислим свойства функций, непрерывных на отрезке числовой прямой. Итак, если функция непрерывна на отрезке , то:

1. Функция ограничена на отрезке . Это утверждение легко доказать от противного.
2. Функция достигает на отрезке минимального и максимального значения.
3. Если числа и имеют разные знаки, то существует такое число что
4. Если то существует такое что Это вытекает из 3, если положить

**Пример 1.4.2**. *Функция*

*непрерывна на интервале но не является непрерывной на отрезке :* при функция терпит разрыв второго рода. □

Функция называется *равномерно непрерывной* на множестве , если

Здесь существенно то, что не зависит от и от выбора .

**Пример 1.4.3**. *Функция*

*непрерывна на интервале но не является равномерно непрерывной на этом интервале.* Действительно, пусть существует число , для которого выполнено условие, указанное в определении равномерной непрерывности. Тогда это условие выполнено для любой пары . Выберем эту пару так: Тогда , но не может быть сделано сколь угодно малым. □

Имеет место замечательное свойство функций, непрерывных на отрезке:

**Теорема 1.4.1.** *Если функция непрерывна на отрезке то она равномерно непрерывна на этом отрезке*.

**Доказательство**. Предположим противное:

Тогда для найдутся и на отрезке такие, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4.1) |

Так как последовательность ограничена, она обладает сходящейся подпоследовательностью Аналогично . Так как непрерывна в точке , то , что противоречит второму неравенству из (1.4.1). ■

**Продолжение по непрерывности и непрерывность обратной функции**.

**Теорема 1.4.2**. *Пусть функция равномерно непрерывна на и - множество предельных точек множества . Тогда допускает равномерно непрерывное продолжение на* .

Идея доказательства. Требуется доказать, что существует функция ,равномерно непрерывная на *.* Доказательство основано на выборе

и специальном выборе при произвольном значении для трех пар на трех точках из множества . Для одной пары неизбежно получается, что модуль изменения функции меньше , что доказывает ее равномерную непрерывность. ■

**Теорема 1.4.3**. *Пусть – промежуток в и строго возрастает (убывает) и непрерывна. Тогда обратная к функция также возрастает (убывает) и непрерывна.*

Идея доказательства. Так как соответствующее возрастание (убывание) обратной функции можно легко доказать различными способами (предоставляется читателю), то требуется доказать, что функция непрерывна*.* Это можно доказать, выбрав последовательность в области определения функции и найдя ее прообраз относительно . Далее надо выбрать сходящуюся подпоследовательность и показать, что ее образ сходится к образу предела последовательности относительно ■

**Пример 1.4.4**. Функция непрерывна и строго возрастает (убывает) при . Следовательно, обратная к ней функция непрерывна и строго возрастает (убывает) на тех же значениях. Таким образом, для каждого числа существует единственное число такое, что В этом случае обозначают . □

**Важнейшие элементарные функции**. Класс, состоящий из известных из средней школы функций: полиномиальных, логарифмических, показательных, тригонометрических и обратных тригонометрических, а также функций, получающихся из них при помощи арифметических операций и операций композиции конечное число раз, называется классом *элементарных функций*. Из материалов настоящей главы видно, что любая элементарная функция непрерывна в своей области определения. Действительно, операция взятия предела перестановочна с алгебраическими операциями и операцией композиции, а для указанных функций, составляющих элементарную функцию, непрерывность в области определения легко установить.

### Упражнения

**1.4.1 Найдите точки разрыва функции:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

**1.4.2 При каких значениях постоянных функция будет непрерывной?**

а) ; б) ; в) ; г) .

**1.4.3 Исследуйте функции на равномерную непрерывность:**

а) ; б) ; в) ; г) .

# Глава II. Дифференциальное исчисление

## 1. Производная функции

**Определение производной**. Понятие производной функции в точке тесно связано с приближенными вычислениями значений функции в окрестностях точек. Проще всего приближенно представить график функции в окрестности определенной точки в виде отрезка прямой. Тогда угловой коэффициент этой прямой можно выразить в виде

Ясно, что чем меньше окрестность, тем точнее приближение. Поэтому имеет смысл рассмотреть величину углового коэффициента при и в ближайшей окрестности точки записать, полагая :

Величина

называется *производной функции* *в точке*

**Пример 2.1.1**. *Вычислим производную функции в точке*

Согласно определению,

Предел в этом выражении равен 1, согласно следствию из второго замечательного предела. Поэтому

□

**Геометрический и физический смыслы производной**. По определению, производная функции в точке представляет собой угловой коэффициент некоторой прямой, проходящей через точку . Эта прямая называется *касательной* к графику функции в точке . Геометрически производная функции в точке представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции в этой точке по отношению к оси .

**Пример 2.1.2**. *Построим касательную к графику функции в точке*

По определению, касательная к графику функции – это прямая, угловой коэффициент которой равен производной функции в точке. Эта прямая должна проходить через указанную точку. Имеем:

Общий вид канонического уравнения прямой с этим угловым коэффициентом есть

Величину найдем из требования (прямая проходит через точку

или

Отсюда следует, что искомое уравнение касательной имеет вид:

Схематически графики функции и касательная к нему в точке выглядят как показано на рис. 1. □

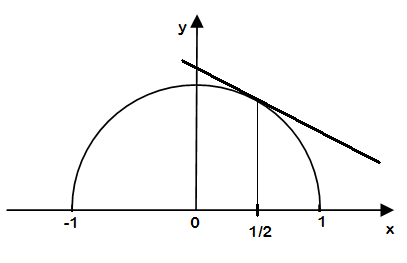


Рис. 1. Касательная к окружности.

Физический смысл производной легко установить, если в качестве функции взять какую-либо наблюдаемую величину, а в качестве переменной – время. Например, рассмотрим перемещение груза на подвесе при малых колебаниях относительно точки равновесия. Как известно, в этом случае отклонение груза от положения равновесия изменяется со временем как

где - амплитуда колебаний, - частота колебаний, а - угол отклонения подвеса от вертикали в момент Найдем производную функции в точке :

Если, например, в момент , груз проходит положение равновесия, то

В то же время, в этот момент вся энергия груза превращается в кинетическую энергию, то есть

где – длина подвеса. Из школьного курса физики известно, что частота колебаний груза на подвесе равна

и тогда получаем в точке, где кинетическая энергия максимальна,

то есть производная функции координаты в момент времени равна скорости в этот момент времени. Вообще, в силу того, что скорость по определению есть мгновенное отношение изменения значения наблюдаемой ко времени этого изменения, получается, что скорость изменения любой величины всегда равна производной этой величины как функции времени в рассматриваемый момент времени. Это и есть физический смысл производной функции в точке.

**Основные свойства производной**. Следующие свойства помогают вычислять производные элементарных функций. Далее, если не возникает противоречий, подразумеваем, что производная берется в точке .

1. Взятие производной – линейная операция:
2. Производная произведения и частного функций:
3. Производная композиции функций:
4. Производная обратной функции. Если то есть - обратная функция для то из предыдущего свойства

то есть

Так как четвертое свойство следует из третьего, то достаточно привести доказательства первых трех свойств:

**Пример 2.1.3**. *Вычислим производную функции в точке* .

Производная функции вычислена при доказательстве свойства 4 и равна 1 в любой точке . Согласно свойству 2, искомая производная равна

то есть

□

**Производные основных элементарных функций**. Вычислим производные, которые с помощью указанных выше свойств дадут возможность находить все производные элементарных функций.

1. Если то
2. По свойству 4:
3. По определению производной:
4. **.** Доказательство аналогично п. 4.
5. **,**
6. Доказательство аналогично п. 6.
7. Доказательство аналогично п.8.
8. Аналогично п. 10.

Имеется еще семейство функций, которые являются полезными в дальнейшем – это *гиперболические функции*, определяемые формулами:

Читаются: *гиперболический синус*, *гиперболический косинус*, *гиперболический тангенс* и *гиперболический котангенс*, соответственно. Их производные:

1. **.**

Приведем примеры использования указанных выше свойств и видов функций для вычисления производных произвольных функций, построенных из элементарных.

**Пример 2.1.4**. *Вычислим производные функций* ,

Применяя свойства и найденные виды производных, находим:

□

Укажем еще способ взятия производной, называемый *логарифмическим дифференцированием*. Он применяется тогда, когда применить указанные выше правила представляется затруднительным. Логарифмическое дифференцирование – это процедура, представляющая собой последовательные действия: логарифмирование – взятие производной – возврат к исходной функции. Лучше всего эту процедуру проиллюстрировать на примерах:

**Пример 2.1.5**. *Вычислим производную функции в точке* .

Прологарифмируем выражение :

и возьмем производную от обеих частей полученного равенства:

Отсюда найдем искомую производную:

□

Вообще, легко заметить, что всегда

Эта формула и иллюстрирует процедуру взятия логарифмической производной.

**Производные высших порядков**. Пусть имеет производные в каждой точке Таким образом, определена функция , значения которой в каждой точке совпадают со значениями производной функции в точке . Говорят, что функция является *функцией, производной от* .

Если функция имеет производную в каждой точке множества , то определена функция являющаяся производной функцией от . По отношению к , функция называется *второй производной функции* .

Аналогично можно определить третью, четвертую и т.д. производные и вообще *производную любого натурального порядка* , которая обозначается . Сама функция идентифицируется с производной нулевого порядка: =.

**Теорема 2.1.1**. **Формула Лейбница**. *Пусть даны две функции и , имеющие производных в точке . Тогда справедлива формула:*

*где*

*величины, называемые* *биномиальными коэффициентами*.

**Доказательство**. По индукции: пусть формула верна для всех чисел, меньших или равных . Докажем, что в этом случае формула является верной для . Имеем:

Выпишем отдельно слагаемые, содержащие сами функции и *,* учитывая, что :

Заметим, что

В результате

что и требовалось доказать. ■

### Упражнения

**2.1.1 Найдите производные функций:**

а) ; б) ; в) ;

г) .

**2.1.2 Пользуясь представлением найти производные функций:**

а) ; б) ; в) ; г) .

**2.1.3 Найдите третьи производные функций:**

а) ; б) ; в) ; г) .

**2.1.4 Пользуясь формулой Лейбница, найдите производные функций заданного порядка:**

а) ; б) ; в) ; г) .

## 2. Дифференцирование функции. Дифференциал

**Определение дифференциала**. Функция, имеющая производную в определенной точке, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Из определения, в силу существования предела, следует, что дифференцируемая в точке функция непрерывна в этой точке.

Процедура нахождения функции, производной от данной, называется *дифференцированием*.

Пусть функция дифференцируема в точке . Рассмотрим отображение, заданное на смещениях от точки следующим образом:

Это линейное отображение называется *касательным отображением в точке к функции* . Значение касательного отображения на смещении называется *дифференциалом функции в точке* .

Традиционно приняты обозначения:

Таким образом,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.1) |

На рис. 2 представлен геометрический смысл дифференциала функции: изображен график функции и касательная к этому графику в точке Поскольку угловой коэффициент задан производной, то уравнение касательной имеет вид:

Таким образом, дифференциал функции в точке равен

тогда как приращение функции в точке равно

Отсюда вытекает качественное определение дифференциала: *дифференциал – это главная часть приращения функции, линейная по приращению аргумента*.

Рис. 2 .

**Пример 2.2.1**. *Вычислим дифференциалы функций* , *и оценим приращения этих функций в точках , если*

Для оценки вычислим главную линейную по аргументу составляющую приращения функции. Она равна дифференциалу заданной функции. Поэтому, соответственно:

□

**Дифференциалы высших порядков**. Так как в определении дифференциала смещение не зависит от точки , то есть является независимым параметром, то имеется возможность применить композицию касательных отображений:

и так далее для любого натурального :

Следуя общепринятым обозначениям, имеем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.2) |

Отсюда получим другое обозначение для производной го порядка:

**Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически**. С помощью понятия дифференциала легко можно находить производные функций, которые заданы с помощью параметра или неявных функций. Достаточно помнить о том, что производная может быть представлена как отношение дифференциалов (так как - это тоже дифференциал только для функции ).

**Пример 2.2.2**. *Найти производную функции , заданной параметрически:*

Искомая производная имеет вид В то же время,

то есть

□

Способ вычисления, указанный в примере 2.2.2, носит универсальный характер: для вычисления производной функции, заданной параметрически, следует вычислить дифференциалы переменных и поделить дифференциал значения функции на дифференциал переменной .

В случае неявного задания функции, она будет иметь вид

Для вычисления производной функции , надо взять дифференциал от выражения , считая функцией от .

**Пример 2.2.3**. *Найдем производную функции если*

Будем брать дифференциал от обеих частей этого равенства, считая переменную определенной как значение функции . Тогда будем иметь:

отсюда

и

□

**Инвариантность формы первого дифференциала при замене переменной**. Что произойдет в случае замены переменной в дифференцируемой функции? Пусть дана функция и задана новая переменная так что Вычислим дифференциал функции в новой переменной:

то есть,

Эта формула выражает свойство *инвариантности первого дифференциала* при замене переменной: значение дифференциала функции можно вычислять, меняя переменную произвольно – дифференциал всегда будет выражаться произведением производной полученной после замены переменной функции на дифференциал переменной.

### Упражнения

**2.2.1 Найдите дифференциалы функций:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.2.2 Найдите производные функций , заданных параметрически:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.2.3 Найдите дифференциалы функций , заданных неявно:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.2.4 Найдите первоначальную величину:**

а) длин ребер куба, если при их увеличении на 1см объем изменился на 12 см3; б) радиуса круга, если при его увеличении на 1см площадь изменилась на см3; в) длины стороны равностороннего треугольника, если при ее увеличении на 1 см, радиус вписанной окружности увеличился на 5 мм; г) радиуса цилиндра, если при увеличении его на 1 см, объем цилиндра увеличивается на см3.

## 3. Теоремы о дифференцируемых функциях

**Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши**. Рассмотрим непрерывную функцию , дифференцируемую на Докажем для такой функции теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

**Теорема 2.3.1 (Теорема Ролля)**. *Для непрерывной функции , дифференцируемой на , и такой, что существует такое число что*

**Доказательство**. Если то справедливость теоремы очевидна. Пусть и существуют Так как функция непрерывна на отрезке, она ограничена на нем, а значит существует какое-то максимальное значение среди . Обозначим его и рассмотрим пределы:

но в силу дифференцируемости функции, эти пределы должны быть равны между собой и равны производной . Следовательно, они равны нулю. В случае, если не существует значений , будут существовать значения , и тогда доказательство легко повторить в той же логике. ■

**Теорема 2.3.2 (Теорема Коши)**. *Для непрерывных функций , дифференцируемых на , и таких, что и производные и не равны нулю одновременно, существует такое число что*

**Доказательство**. Построим функцию

Легко проверить, что она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому существует такое число , что

Отсюда следует утверждение теоремы. ■

**Теорема 2.3.3 (Теорема Лагранжа)**. *Для непрерывной функции , дифференцируемой на , существует такое число что*

**Доказательство**. Следует из теоремы Коши при ■

Утверждение теоремы 2.3.3 называют еще *формулой конечных приращений*.

**Правило Лопиталя**. Имеется очень полезная теорема, которая позволяет в большинстве случаев легко и быстро находить пределы функций.

**Теорема 2.3.4 (правило Лопиталя)**. *Пусть и функции и определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки , причем Пусть выполнено одно из условий*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.1) |
|  | (2.3.2) |

*Если существует (может быть бесконечный) предел то*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.3) |

*Утверждение верно также для и односторонних пределов*.

**Доказательство**. Разберем два случая: (условие (2.3.1), , ) и (условие (2.3.2), , ).Остальные входящие условия рассматриваются теми же приемами.

Пусть выполнено условие (2.3.1) и , . Доопределим функции итак, что Тогда эти функции непрерывны для любого отрезка и справедлива теорема Коши:

Получаем

Случай предела слева доказывается аналогично.

Пусть теперь выполнено условие (2.3.2) и , . Обозначим Рассмотрим отрезок , на котором справедлива теорема Коши:

где величина может быть представлена в виде:

Выберем точку так, чтобы для любых для соответствующего выполнялось

В силу условия (2.3.2), существует такое, что

Тогда для

то есть

Случай предела слева доказывается аналогично. ■

**Пример 2.3.1**. *Вычислим предел* .

В данном случае выполнено условие (2.3.1) и можно пользоваться правилом Лопиталя. Имеем:

□

**Пример 2.3.2**. *Вычислим предел*

Выполнено условие (2.3.2). Действуя по правилу Лопиталя, находим:

□

Вычислять пределы по правилу Лопиталя можно и в случае неопределенностей типов . Для этого следует привести неопределенности к типам или алгебраическими преобразованиями или специальным представлением исходного предела.

**Пример 2.3.3**. *Вычислим предел*

Видим неопределенность типа . Выполним алгебраические преобразования:

и теперь выполнено условие (2.3.2). Действуя по правилу Лопиталя, находим:

повторим раз, после чего останется только в знаменателе и приведет нас к

□

**Пример 2.3.4**. *Вычислим предел*

Тип неопределенности: . Алгебраические преобразования сводятся к приведению к общему знаменателю:

после чего выполнено условие (2.3.1). Действуя по правилу Лопиталя, находим:

□

**Пример 2.3.5**. *Вычислим предел*

Тип неопределенности: . Воспользуемся представлением

после чего останется вычислить предел

В нем тип неопределенности и с ней мы уже встречались:

Осталось вернуться к первоначальному пределу:

□

**Формула Тейлора**. Часто требуется вычислить значение функции вблизи какой-то точки, в которой значение функции известно, используя упрощенную формулу. Эта формула называется *формулой Тейлора* и устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 2.3.5 (формула Тейлора)**. *Пусть и функция определена и раз непрерывно дифференцируема на отрезке и раз дифференцируема на . Тогда для некоторого справедлива формула*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.4) |
| Величина |  |
|  | (2.3.5) |

называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

**Доказательство**. Введем вспомогательную функцию

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.6) |

с таким чтобы . Так как по построению, то функция удовлетворяет теореме Ролля, то есть Таким образом,

Отсюда следует, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.7) |

и из (2.3.6) получаем (2.3.4). ■

**Следствие (формула Тейлора с остатком в форме Пеано)**. *Пусть и функция определена и раз дифференцируема в точке . Тогда при справедлива формула*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.8) |

*и это разложение единственно*.

В качестве примеров применения формулы Тейлора, приведем выражения для значений основных элементарных функций возле нуля:

**Пример 2.3.6**. *Вычислим вблизи*

Будем считать в формуле (2.3.4) и Тогда, соответственно

где □

### Упражнения

**2.3.1 Вычислите пределы:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.3.2 Вычислите пределы с неопределенностью :**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.3.3 Вычислите пределы:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.3.4 Представьте с помощью формулы Тейлора значения функций вблизи нуля:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.3.5 Представьте с помощью формулы Тейлора с остатком в форме Пеано значения функций возле единицы:**

а) ; б) ; в) ; г)

## 4. Приложения дифференцирования в геометрии и вычислительной математике

**Геометрические приложения**. Первое приложение уже было упомянуто выше: на рис. 2 представлена касательная к графику функции в точке Ее уравнение имеет вид:

Таким образом, зная аналитическое задание функции и найдя производную функции в заданной точке, можно всегда построить касательную к ее графику в этой точке.

Прямая, перпендикулярная касательной к графику функции в точке называется *нормалью* к графику функции в этой точке. Уравнение нормали можно легко построить, зная уравнение касательной: направляющие векторы этих прямых должны быть ортогональны и прямые должны пересекаться в точке . Зададим эти два условия. Направляющий вектор касательной имеет компоненты

значит, ввиду ортогональности, можно выбрать направляющий вектор нормали в виде

Тогда уравнение нормали будет иметь вид

а величину найдем из второго условия:

В итоге, уравнение нормали примет вид

**Пример 2.4.1**. *Найдем уравнения касательной и нормали к графику функции в точке .*

В качестве шаблонов возьмем выведенные выше уравнения и подставим вместо заданную точку. Уравнение касательной будет иметь вид

или, после упрощения,

Уравнение нормали:

□

Следующие два применения дифференциала в геометрии весьма полезны в задачах навигации и глобального позиционирования – это *кривизна кривой* и *элементарный интервал*.

Пусть имеются две точки и . Как известно, квадрат расстояния между этими двумя точками выражается формулой

Если эти две точки расположены на кривой, являющейся графиком функции и расстояние между ними нужно найти *вдоль этой кривой*, то при , с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, будем иметь

Величина называется *элементарной длиной дуги* кривой . Вообще величины, характеризующие расстояния между двумя бесконечно близкими точками, называются *элементарными интервалами*.

**Пример 2.4.2**. *Найдем элементарную длину дуги верхней полуокружности и нижней полуокружности . Сравним их.*

По формуле и с учетом того, что , имеем

Очевидно, для нижней полуокружности будет то же самое, так как у производной изменится только знак, а она входит в элементарную длину дуги в квадрате. □

*Кривизна* кривой, задаваемой графиком функции в точке по модулю определяется как предел отношения разности углов между касательными к элементарной длине дуги:

где , - угловой коэффициент касательной в точке . Выражение для углового коэффициента есть производная в данной точке, поэтому разность можно представить в виде:

что в дифференциальной записи примет вид

Имеем:

Вычисляя, находим

Знак в формуле кривизны для линий на плоскости в декартовых координатах можно выбрать любым, но следует сохранить свой выбор вдоль всей кривой.

**Пример 2.4.3**. *Найдем кривизну полуокружностей и касательных к ним в произвольной точке .*

Касательная – это прямая и для нее всегда то есть Что касается окружности, то интуитивно ясно, что ее кривизна должна быть постоянной. Проверим это:

Таким образом, кривизна окружности радиуса 2, по модулю равна . Но по геометрическому смыслу она должна быть равна везде! Таким образом, на нижней полуокружности нам следует поменять знак кривизны. При этом правило сохранения выбора знака вдоль кривой не будет нарушено, так как верхняя и нижняя полуокружности выражаются разными функциями, то есть, это разные кривые. □

Полученный в примере результат оправдывает то, что величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* кривой в точке:

**Приложения в вычислительной математике**.

Понятие дифференциала можно использовать в приближенных вычислениях. Так, на основе Теоремы 2.3.5 и формулы (2.3.8), функция возле точки может быть представлена в виде

При достаточно малом отклонении от точки , можно представить эту функцию, ограничиваясь первой степенью в правой части:

то есть, представить ее на малом промежутке в виде линейной функции. Если требуется приближенно вычислить значения функции на промежутке то этот промежуток делят на частей точками , на каждом малом промежутке функцию представляют линейным приближением:

Такая процедура называется *линеаризацией* и используется, если на рассматриваемом промежутке она не приводит к слишком большим погрешностям в вычислении. Эти погрешности являются результатом неточности вычислений значений на правых концах промежутков . Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, для погрешности вычисления в точке имеем

Суммарная ошибка при вычислении на всем промежутке при условии, что не зависит от :

имеет порядок малости 2 по но Таким образом, при линеаризации погрешность убывает квадратично с ростом числа разбиений интервала.

### Упражнения

**2.4.1 Найдите уравнения касательной и нормали к графику функции в точке (1,0):**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.4.2 Вычислите элементарную длину дуги кривой:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.4.3 Найдите кривизну и радиус кривизны для кривой в точках (0,0) и (1,1):**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.4.4 Проведите линеаризацию функции на промежутке [0,1] для вычислений с точностью до 0,05:**

а) ; б) ; в) ; г)

## 5. Исследование функций и построение графиков

**Возрастание и убывание**. Рассмотрим непрерывную функцию . Будем говорить, что на промежутке функция *строго* *возрастает*, если . Если вместо в тех же условиях имеем то функция *строго* *убывает* на промежутке . Если функция строго возрастает (строго убывает) на промежутке и и функция уже не возрастает (не убывает) на промежутках и , то промежуток называется *промежутком возрастания* (*промежутком убывания*) функции .

**Теорема 2.5.1.** *Пусть промежуток является промежутком возрастания (убывания) для функции . Тогда в каждой точке справедливо* (*соответственно,*)*.*

**Доказательство**. По определению производной, на промежутке возрастания

так как при из-за возрастания (убывания) функции имеем (соответственно, ). ■

**Пример 2.5.1**. *Найдем промежутки возрастания функции*

Рассматриваемая функция определена на множестве Найдем производную функцию:

Определим промежутки, в которых эта производная положительна. Для этого оба сомножителя в последнем выражении должны быть одного знака. Имеем:

Пусть

Тогда

и в случае

С другой стороны, в этом случае

Итак, имеем первое множество промежутков возрастания:

Второе множество находится аналогично:

В итоге, промежутки возрастания исследуемой функции задаются соотношением:

Как видно, отметить их на числовой прямой довольно трудно. Но есть возможность определить границы промежутков на заданном интервале изменения переменной численно, составив соответствующую программу (упражнение). □

**Экстремумы и исследования функции на них**. Функция непрерывная в точке , обладает *локальным максимумом* (*локальным минимумом*) в этой точке, если существует такая окрестность нуля что (соответственно, ) для всех Будем говорить, что функция обладает в точке *локальным экстремумом*, если она имеет в этой точке локальный максимум или минимум.

Из определения экстремума ясно, что по разные стороны от точки экстремума функция находится в разных режимах возрастания или убывания: либо функция убывает до точки экстремума и возрастает после нее (тогда это минимум), либо возрастает до точки экстремума и убывает после нее (максимум). В связи с этим и с учетом Теоремы 2.5.1, получаем вывод, носящий название теоремы Ферма для дифференцируемых функций:

**Теорема 2.5.2 (Теорема Ферма).** *Пусть точка является точкой локального экстремума для функции которая имеет в этой точке непрерывную производную. Тогда .*

**Доказательство**. По Теореме 2.5.1 и в соответствии с определением локального экстремума, имеем

для минимума и

для максимума. Непрерывная по условию функция должна удовлетворять условию

где есть общая предельная точка для множеств и . Эта общая предельная точка единственна: ■

Таким образом, процедура исследования функции на локальный экстремум заключается в следующем:

1. Вычислить производную функцию.
2. Найти нули производной функции.
3. Проверить переход режимов возрастания и убывания функции в нулях производной функции.

Те точки (нули производной функции), в которых промежуток возрастания функции сменяется промежутком убывания или наоборот, являются экстремумами функции по определению локального экстремума и по теореме 2.5.2.

**Пример 2.5.2**. *Найдем точки локальных экстремумов функции .*

Действуя по указанному выше плану, находим производную и ее нули:

что дает следующий набор точек – кандидатов в локальные экстремумы:

и

Точка является, очевидно, локальным минимумом, так как до нее функция убывает: при , а после нее – возрастает: при для достаточно малых .

Точки представляют собой локальные максимумы при , так как меняет знак с положительного на отрицательный при проходе точки для любых . При точки являются локальными минимумами, так как знак меняется с отрицательного на положительный при проходе точки для любых .

Легко установить, что точки являются локальными минимумами при нечетных и максимумами при четных . Это следует из смены знака аргумента производной и четности косинуса. □

**Пример 2.5.3**. *Найдем точки локальных экстремумов функции .*

Находим производную и ее нули:

что дает следующий набор точек – кандидатов в локальные экстремумы:

и

Точка не является локальным экстремумом, так как и до, и после нее функция возрастает: при любом .

Точки представляют собой локальные максимумы при нечетных и минимумами при четных . □

**Направления выпуклости и точки перегиба**. Если функция является дважды непрерывно дифференцируемой на интервале то для нее можно ввести функцию кривизны графика в точке:

Если на всем интервале кривизна неотрицательна, то есть , то функция на этом интервале называется *вогнутой*. Если же на всем интервале кривизна не принимает положительных значений: , то функция называется *выпуклой*. При строгих неравенствах, функция называется, соответственно, *строго вогнутой* и *строго выпуклой* на интервале.

Так как в знаменателе формулы кривизны стоит строго положительная величина, то выпуклость и вогнутость функций целиком определяется знаком ее второй производной. А именно: функция будет выпуклой, если и вогнутой, если .

Геометрически выпуклость функции на интервале означает, что в любой точке этого интервала график функции расположен выше касательной к графику в этой точке:

Доказательство элементарно из определения выпуклости и понятия производной – предоставляется в качестве упражнения.

Вогнутость означает, что график функции расположен ниже касательной.

Пусть есть такая точка в области определения функции , что в малой ее проколотой окрестности функция является дважды дифференцируемой и справедливо либо:

либо

Тогда точка называется *точкой перегиба* функции . Иными словами, точка перегиба – это точка, в которой функция меняет направление выпуклости/вогнутости.

Научившись вычислять промежутки выпуклости и вогнутости функции, можно схематически строить ее график: там, где функция выпукла, график при черчении слева направо надо закруглять вверх; там, где вогнута, – вниз.

Чтобы найти точки перегиба, следует воспользоваться следующей теоремой:

**Теорема 2.5.3.** *Пусть точка является точкой перегиба для функции которая имеет в этой точке две непрерывные производные. Тогда .*

**Доказательство**. Пусть в окрестности справедливо

Тогда доказательство полностью аналогично доказательству Теоремы 2.5.2 Аналогично строится доказательство для обратных знаков.■

Но Теорема 2.5.3 дает только необходимое условие для точки перегиба. Ведь может случиться ситуация, когда , но точка не будет точкой перегиба. Например, для функции в нуле имеем но вторая производная положительна с обеих сторон от нуля – нет точки перегиба. Поэтому смену направления выпуклости/вогнутости следует отдельно исследовать, чтобы установить, что точка является точкой перегиба.

**Пример 2.5.4**. *Найдем промежутки выпуклости и вогнутости функции .*

Если найдем точки перегиба и узнаем направление выпуклости на любом интервале между этими точками, то сможем определить направление выпуклости/вогнутости на всех интервалах между найденными точками. Имеем:

Так как экспонента нигде не обращается в нуль, то это дает следующий набор точек – кандидатов в точки перегиба:

Определим направления выпуклости/вогнутости слева и справа от указанных точек:

Аналогичные соотношения, но с противоположными знаками вторых производных, будут при В любом случае оказывается, что в точках направления выпуклости изменяются. Таким образом, это точки перегиба.

Функция вогнута при . Следовательно, она будет вогнутой на всех интервалах . На оставшихся интервалах , функция будет выпуклой. □

**Критические точки второго порядка**. Пусть функция определена и является дифференцируемой на интервале за исключением, может быть, точки . Если в точке вторая производная функции не существует, обращается в бесконечность или

то называется *критической точкой второго порядка*.

Как явствует из определения и свойств точек перегиба, критическая точка второго порядка может быть точкой перегиба. Определить является ли критическая точка второго порядка точкой перегиба, можно по определению точки перегиба, вычисляя вторые производные слева и справа от критической точки.

**Пример 2.5.5**. *Исследуем для функции критические точки второго порядка*

Вычислим вторую производную функцию. Имеем:

Видим, что вторая производная в точках обращается в нуль. Но заметим также, что в точке функция не определена.

Вторая производная меняет знак при переходе через обе точки. Значит, обе названные критические точки второго порядка являются точками перегиба. Заметим, что поскольку первая производная не обращается в нуль нигде, рассматриваемая функция не имеет локальных экстремумов. □

**Асимптоты**. Прямые на плоскости, к которым график функции приближается на бесконечно малое расстояние, но никогда не совпадает с ними, называются *асимптотами*.

Если функция имеет разрыв 2-го рода в точке и, кроме того, функция определена и непрерывна в любой точке любой проколотой окрестности точки , то говорят, что в точке функция имеет *вертикальную асимптоту* .

Если имеет место равенство

то функция имеет *горизонтальную асимптоту* .

Условием наличия у функции *наклонной асимптоты* является, согласно данному выше определению, следующее равенство

**Пример 2.5.6**. *Найдем асимптоты для графика функции*

Так как функция определена при всех , вертикальных асимптот нет. Функция не имеет конечного предела при , так что горизонтальных асимптот тоже нет. Запишем условие на наклонные асимптоты:

Вычислим предел:

Этот предел будет конечен и равен нулю только в случае Имеем:

Получаем две наклонные асимптоты: и . □

**Исследование функции и построение графика**. Чтобы построить график функции, отличной от линейной, следует провести ее исследование по следующему плану:

1. Найти область определения.
2. Определить нули функции и ее значение при
3. Определить является ли функция *четной*, то есть справедливо ли соотношение .
4. Определить является ли функция *нечетной*, то есть справедливо ли соотношение .
5. Найти все асимптоты.
6. Найти локальные экстремумы и промежутки возрастания и убывания.
7. Найти все критические точки второго порядка и определить промежутки выпуклости и вогнутости.

После осуществления этих шагов, можно построить график функции, используя следующие правила:

1. Вне области определения у функции нет значений. То есть, на границе области определения график может уходить в бесконечность или обрываться. Как именно ведет себя график – покажут односторонние пределы на границе области определения.
2. Нули функции – это точки пересечения графика с осью , а значение при определяет пересечение с осью .
3. График четной функции симметричен относительно оси .
4. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
5. График функции должен стремиться к асимптотам, но не совпадать с ними.
6. В точках локальных экстремумов график проходит вершину «холма» (максимум) или нижнюю точку «ямы» (минимум).
7. В точках перегиба график функции пересекает касательную к нему.

**Пример 2.5.7**. *Построим график функции*

Действуем по плану:

1. Область определения – вся числовая прямая.
2. Нули функции: . Пересечение с осью :
3. Функция четная: .
4. Функция не является нечетной.
5. Есть горизонтальная асимптота: то есть
6. Локальные экстремумы определяются соотношением: В точке функция имеет максимум. Далее промежутки возрастания и убывания чередуются.
7. Критические точки второго порядка определяются соотношением:

Все эти точки являются точками перегиба и, следовательно, промежутки выпуклости/вогнутости чередуются. Вблизи нуля функция вогнута.

Построим график функции (подразумевается, что графики функций , и известны). Результат на рис. 3 (искомый график сплошной, точечные линии – части служебных графиков).



Рис. 3. Построение графика функции в правой полуплоскости.

Ввиду четности, график можно продолжить влево, отразив его относительно оси . □

### Упражнения

**2.5.1 Найдите интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:**

а) ; б) в) ; г)

**2.5.2 Найдите асимптоты графика функции:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.5.3 Постройте графики простых функций:**

а) ; б) ; в) ; г)

**2.5.4 Постройте графики функций:**

а) ; б) ; в) ; г)

# Глава III. Функция нескольких переменных

## 1. Понятия функции нескольких переменных, ее предела и непрерывности

**Определение функции нескольких переменных**. До сих пор рассматривались лишь функции одной переменной, то есть отображения с областью определения, содержащейся в множестве действительных чисел . Обозначим посредством прямое произведение на себя: - это множество всевозможных наборов вида где и - вещественные числа. По аналогии, определим множество - n-кратное прямое произведение вещественной оси на себя.

Рассмотрим некоторое множество . Множество называется *открытым*, если для каждого набора существуют такие наборы что Элементы множества так же, как и раньше, назовем *точками*. Величины называются *координатами* точки . *Окрестностью* точки называется любое открытое множество, содержащее точку . Множество называется *проколотой окрестностью* точки .

Пусть имеется открытое множество и отображение (возможно, в некоторое подмножество множества ). Если отображение является функцией, то есть каждому элементу множества сопоставлен один элемент множества , то, очевидно, задана *функция* *нескольких переменных*.

**Пример 3.1.1**. *Высота над уровнем моря. Для каждой точки суши на планете можно определить числовую величину – ее высоту над уровнем моря, которая, очевидно, одна для каждой точки суши. Точки могут быть заданы их координатами: широтой и долготой. Таким образом, имеем функцию высоты над уровнем моря :*

**Пример 3.1.2**. *Объем параллелепипеда с заданными сторонами. Для множества параллелепипедов со сторонами можно ввести функцию, определяющую объем заданного параллелепипеда Это будет отображение*

**Способы задания функции нескольких переменных**. Также как и для функции одной переменной, существуют различные способы задания функций нескольких переменных. В примере 3.1.2 объем параллелепипеда задается формулой – это *аналитическое задание* функции. Оно является наиболее распространенным для целей анализа.

Другим способом задания функции нескольких переменных является *табличное задание* или, в более общем случае, задание в виде *массива данных*. Для функции двух переменных составляется таблица, строки которой соответствуют определенным значениям первой переменной, а столбцы – значениям второй переменной. На пересечении соответствующей строки и столбца стоит значение функции в точке с данными координатами. Если координат больше, чем две, то функция может быть задана *массивом данных* вида где при подстановке конкретных значений координат, значение массива равно значению функции.

Наконец, для случая функции двух переменных, возможно *графическое задание*: функция задается в виде поверхности в пространстве. Проекции точек этой поверхности на плоскость дают координаты точки – аргумента функции. А проекция на ось дает значение функции в данной точке. Для случая функции более, чем двух переменных, графическое задание невозможно.

**Предел функции нескольких переменных**. Точка , принадлежащая или не принадлежащая открытому множеству , называется *предельной точкой множества* , если каждая проколотая окрестность точки содержит бесконечно много точек из .

Пусть имеется функция () и - предельная точка множества . Число называется *пределом функции* в точке , если из того, что все последовательности , члены которых являются координатами точек **,** лежащих в , сходятся к соответствующим координатам точки , следует, что сходится к . Обозначение:

В соответствии с данным определением, для существования предела функции в точке необходимо чтобы при любом порядке вычисления пределов указанных последовательностей, в пределе функции получалось всегда одно и то же число . Иными словами, предел функции нескольких переменных не зависит от пути его вычисления.

Альтернативная формулировка предела функции нескольких переменных: если имеется функция (), - предельная точка множества и , то Здесь есть *евклидова мера* на пространстве : .

**Пример 3.1.3**. *Найдем пределы функции при и при .*

Согласно данному выше определению,

в том случае, если из того, что последовательности , сходятся к нужной точке, следует, что последовательность сходится к .

Положим . Вычислим предел

Таким образом, предел функции при существует и равен 0.

Положим теперь . Вычислим предел

Таким образом, результат вычисления предела зависит от того какие последовательности будут выбраны. Согласно определению, в этом случае предел функции при не существует. □

Пусть () и – неизолированная точка множества . Функцияназывается *непрерывной в точке* , если

Иначе говоря, для непрерывной в точке функции имеет место равенство:

Свойства функций нескольких переменных, непрерывных в точке, аналогичны тем свойствам, которые имеют непрерывные в точке функции одной переменной.

Функция называется *непрерывной на множестве* если она непрерывна в каждой точке множества . Если эта функция непрерывна на всей области определения, она называется просто *непрерывной функцией*.

### Упражнения

**3.1.1 Задайте таблично следующие функции для :**

а) ; б) в) ; г)

**3.1.2 Найдите пределы функций или докажите, что предела не существует:**

а) ; б) ; в) ; г)

**3.1.3 Выясните является ли функция непрерывной:**

а) ; б) ; в) ; г)

## 2. Частная производная функции нескольких переменных

**Частная производная**. Если в наборе координат точек – аргументов функции все величины, кроме , считать постоянными, то функция будет представлять собой функцию одной переменной . В этом случае можно применить понятие производной к полученной функции. Полученная производная обозначается следующим образом:

и называется *частной производной функции*  *по переменной* .

Как явствует из определения, чтобы вычислить частную производную, следует пользоваться теми же правилами, что и при вычислении обычной производной, считая все переменные, по которым не берется производная, константами.

**Пример 3.2.1**. *Вычислим частную производную функции по обеим переменным*

Согласно определению, свойствам производной и таблице производных элементарных функций,

□

**Геометрический смысл частной производной**. Установка одного из аргументов функции в постоянное значение, геометрически означает сечение поверхности, описываемой функцией, плоскостью, параллельной плоскости или . В этой плоскости в результате получается кривая, угловой коэффициент касательной к которой и определяется частной производной.

**Пример 3.2.2**. *Построим касательную к поверхности, заданной функцией в точке в плоскостях, параллельных*  *и*

Исходя из заданной точки, плоскость, параллельная , в которой лежит касательная, будет плоскостью Именно эта плоскость содержит точку . Таким образом, угловой коэффициент касательной можно определить, взяв частную производную по :

что в точке даст 0. Значит, параметрическое уравнение касательной будет выглядеть так:

так как значение функции () в случае равной нулю производной равно константе, которая совпадает с соответствующей координатой точки, в которой ищем касательную.

В случае плоскости, параллельной , следует рассматривать и частную производную по :

которая уже не равна нулю и дает угловой коэффициент, равный . Получаем следующее уравнение касательной:

так как для того, чтобы прямая с угловым коэффициентом в плоскости проходила через точку , следует добавить к число . □

На самом деле, геометрический смысл частной производной функции любого числа переменных тот же самый: частная производная по переменной дает угловой коэффициент касательной к гиперповерхности, лежащей в гиперплоскости, параллельной плоскости .

При вычислении частных производных высших порядков, полезна следующая теорема.

**Теорема 3.1.1 (О смешанных производных).** *Пусть задана функция нескольких переменных которая имеет в окрестности точки частные производные а также и . Тогда*

**Доказательство**. Для краткости, будем писать в списке аргументов функции только и По определению:

и аналогично в случае обратного следования производных:

Вычитая, находим

Заметим, что предел функции двух переменных существует, если не зависит от пути вычисления. Поэтому можем выбрать любой путь, в том числе, положив В этом случае

Но, вообще говоря, первая частная производная не равна нулю. Это означает, что единственной возможностью сделать равным нулю произведение слева, является равенство смешанных производных.■

### Упражнения

**3.2.1 Найдите все частные производные до 2-го порядка включительно:**

а) ; б) в) ; г)

**3.2.2 Постройте касательные к заданным поверхностям в точке (1,1,1) в плоскостях, параллельных плоскостям**  **и**

а) ; б) ; в) ; г)

## 3. Дифференцируемость функции нескольких переменных

**Дифференциал функции нескольких переменных**. Данное в главе II определение дифференциала может быть обобщено на функции нескольких переменных. Введем это понятие в той же логике, что и для функции одной переменной. Функцию, имеющую все частные производные первого порядка в определенной точке, назовем *дифференцируемой* в этой точке.

Дифференцируемая в точке функция, очевидно, непрерывна в этой точке.

Пусть функция дифференцируема в точке . Будем считать точку вектором с координатами : геометрически это означает, что мы провели в рассматриваемую точку вектор из начала координат. Соответственно, теперь любую точку множества можно рассматривать в качестве вектора. Для векторов известна операция скалярного произведения. С ее помощью построим аналог касательного отображения для функции нескольких переменных, для чего рассмотрим отображение, заданное на смещениях от точки следующим образом:

где точкой обозначено скалярное произведение, а вектор имеет компоненты, являющиеся частными производными функции :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.1) |

Это линейное отображение, также как и раньше, называется *касательным отображением в точке к функции* . Значение касательного отображения на смещении есть *полный* *дифференциал функции в точке* . Слово «полный» здесь подчеркивает, что у функции несколько аргументов; часто, если не возникает противоречий, полный дифференциал называют просто дифференциалом.

Приняты обычные обозначения:

Таким образом,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.2) |

Основное качественное определение дифференциала изменений не претерпело: *дифференциал – это главная часть приращения функции, линейная по приращению аргумента*.

**Пример 3.3.1**. *Вычислим дифференциал функции в точках, где она дифференцируема.*

Вычислим компоненты вектора по формуле (3.3.1):

то есть

В соответствии с формулой (3.3.2), находим дифференциал:

□

**Полная производная**. Отношение дифференциала функции к приращению переменной называется *полной производной* функции и, вообще говоря, не совпадает с ее частной производной. Действительно, если функция является сложной функцией и ее аргументы сами являются функциями, скажем, одной переменной то, обозначив , получим:

что, вообще говоря, не равно . Ясно, что такие же выводы можно сделать, если аргументы являются функциями не одной, а нескольких переменных. Посмотрим на примере.

**Пример 3.3.2**. *Вычислим частную и полную производные по функции где*

*Для сравнения, результаты представим в терминах набора переменных* .

Частная производная:

Найдем полную производную, для чего сначала найдем дифференциалы функций , а также

где приращения аргументов сами являются дифференциалами функций:

Полная производная имеет вид:

Последнее означает, что функция не зависит от . Так оно и есть, поскольку

А вот частная производная была отлична от нуля. □

**Частные производные сложных функций и функций, заданных неявно**. Способ вычисления частной производной сложной функции вытекает из определения дифференциала. Если задана функция и ее аргументы сами являются функциями переменных то, по определению полного дифференциала, найдем, с одной стороны:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.3) |

а с другой стороны, рассматривая как функцию от переменных получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.4) |

причем

Подставим это соотношение в формулу (3.3.3) и учтем (3.3.4):

Сравнивая это с (3.3.4), находим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.5) |

Это и есть выражение для частной производной сложной функции.

**Пример 3.3.3**. *Вычислим частные производные по и функции где*

Согласно формуле (3.3.5):

По той же формуле:

И действительно: не зависит от так что равенство нулю частной производной вполне естественно. □

Так же, как и со сложными функциями, можно вывести дифференциал для функций, заданных неявно, то есть таких, что

и выразить затруднительно. В этом случае функция рассматривается как сложная функция с первой переменной, зависящей от переменных Ее дифференциал должен быть нулевым, поскольку она сама есть нуль. Так что по формуле (3.3.3):

откуда следует

Из последней формулы следует выражение для частных производных функции, заданной неявно:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.6) |

**Пример 3.3.4**. *Вычислим частные производные функции , заданной соотношением*

Согласно формуле (3.3.6):

По той же формуле:

□

**Дифференциалы высших порядков**. Пусть функция дифференцируема в точке и пусть

ее дифференциал. Рассматривая как функцию переменных и, можно найти ее дифференциал по обычному определению:

Можно задаться вопросом – почему в этой формуле нет величин вида ? Ответ – потому что они равны нулю, так как дифференциал – это часть приращения функции, линейная по аргументу, а в этом случае приращение приращения аргумента, линейное по аргументу, дает нуль.

В частности, если рассматривается функция двух переменных, то ее второй дифференциал равен

**Пример 3.3.5**. *Вычислим второй дифференциал функции .*

По общей формуле для второго дифференциала находим:

Принимая во внимание то, что все вторые производные по одной и той же переменной для этой функции равны нулю, а производные по двум разным переменным дают третью переменную, получаем:

□

### Упражнения

**3.3.1 Найдите полную производную функции:**

а) ; б) в) ; г)

**3.3.2 Найдите обе частные производные сложной функции:**

а) ; б) ; в) ; г)

**3.3.3 Найдите полную производную функции , заданной неявно:**

а) ; б) ; в) ; г)

**3.3.4 Найдите частную производную функции , заданной неявно:**

а) ; б) ; в) ; г)

**3.3.5 Найдите второй дифференциал функции :**

а) ; б) ; в) ; г)

## 4. Экстремум функции нескольких переменных

**Понятие экстремума функции нескольких переменных**. Пусть () непрерывна на множестве . Функцияимеет *экстремум* *в точке* , если для любой достаточно малой окрестности точки справедливо

Если в окрестности , то говорят, что функция имеет *максимум* в точке . Если , то функция имеет *минимум* в точке **.**

**Пример 3.4.1**. *Функция имеет максимум в точке* (0,0), *так как для любых и , отличных от нуля, будет меньше 1.*

Геометрически указанная функция представляет собой полусферу единичного радиуса, лежащую на плоскости Верхняя точка ее «купола» будет как раз над началом координат. □

**Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных**. Пусть имеет экстремум в точке Докажем теорему о необходимом условии локального экстремума этой функции.

**Теорема 3.4.1**. *Пусть функция* *определена на множестве* , *имеет экстремум в точке* *и дифференцируема в ней*. *Тогда*

**Доказательство**. Зафиксируем все переменные в функции , кроме , то есть, будем считать их постоянными. Тогда функция станет функцией одной переменной и будет удовлетворять теореме Ферма для дифференцируемых функций. Поступая так для всех значений , получаем доказательство теоремы. ■

**Пример 3.4.2**. *Функция имеет максимум в точке* (0,0), *проверим справедливость теоремы* 3.4.1*.*

Согласно теореме, все частные производные функции в точке (0,0) должны быть равны нулю.

Считаем производные:

Подставляя в них находим

Теорема справедлива. □

**Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных**. Пусть в точке дифференцируема и все ее частные производные равны нулю. В этом случае назовем точку *стационарной* точкой функции Рассмотрим элементарные приращения функции в стационарной точке и докажем теорему о достаточном условии экстремума функции нескольких переменных.

**Теорема 3.4.2**. *Пусть функция* *определена на множестве* , *имеет стационарную точку* , *в которой дифференцируема*, *как минимум, дважды,* *и ее вторые частные производные непрерывны*. *Тогда наличие экстремума в точке* *находится в соответствии со знаком второго дифференциала функции в точке :*

*Если то имеется минимум.*

*Если то имеется максимум.*

*Если может принимать и положительные, и отрицательные значения, то экстремума в этой стационарной точке нет.*

*Наконец, если по некоторым направлениям[[1]](#footnote-1)**обращается в нуль, а в остальных направлениях имеет один и тот же знак, то вопрос о наличии экстремума следует рассмотреть дополнительно.*

**Доказательство**. Согласно определению стационарной точки, в ней . По определению экстремума, в точках, отличных от стационарной, не должен быть разных знаков, иначе вместо

будет

Видно, что эти два условия противоречат друг другу. Следовательно, в таком случае экстремума нет. Но описанный случай точно соответствует тому, что может принимать и положительные, и отрицательные значения. Доказано третье положение теоремы.

Пусть . Тогда

При

а при

То есть, при переходе через точку , мы получим изменение знака производной с минуса на плюс, двигаясь вдоль любой оси . Значит, при в точке имеем минимум. Аналогично доказывается случай и максимума, соответственно. Тем самым доказаны первые два положения теоремы.

Если неравенство становится нестрогим: то

При

а при

При таких обстоятельствах, изменение знака производной возможно не для всех направлений и поэтому нельзя сказать о наличии экстремума однозначно. ■

**Пример 3.4.3**. *Найдем стационарную точку и экстремум функции .*

Выпишем частные производные функции :

Из условия их равенства нулю находим координаты стационарной точки:

Вычислим теперь второй дифференциал функции :

и выясним его знак возле точки (0,0), для чего вычислим дискриминант этого квадратного трехчлена, например, относительно :

В то же время, при , и обращается в нуль только при . Значит, второй дифференциал положительно определен. Следовательно, в стационарной точке (0,0) рассматриваемая функция имеет минимум. □

Способ распознавания экстремума из примера 3.4.3 можно обобщить на все функции двух переменных. Пусть есть стационарная точка функции . Тогда в точке

где . Знак второго дифференциала будет определенным, если дискриминант полученного трехчлена будет отрицательным или равным нулю. А именно:

1. сли и то и в стационарной точке имеется максимум.
2. сли и то и в стационарной точке имеется минимум.
3. сли , то , что будет равно нулю при . Для определения наличия экстремума необходимо проверить соблюдение этого равенства и в точках, близких к стационарным, то есть требуется дополнительное исследование.
4. сли , то в стационарной точке экстремума нет.

**Пример 3.4.4**. *Исследуем на экстремум функцию .*

Выпишем частные производные функции :

Из условия их равенства нулю находим координаты стационарной точки:

то есть, имеется целая прямая из стационарных точек. Вычислим второй дифференциал функции :

Таким образом, является знакоопределенной величиной только при . То есть, в точке (0,0,1) имеется максимум, а в остальных точках стационарной прямой экстремума нет. □

### Упражнения

**3.4.1 Найдите стационарные точки функции:**

а) ; б) в) ; г)

**3.4.2 Исследуйте функцию на экстремум:**

а) ; б) ; в) ; г)

## 5. Скалярное поле

**Понятие скалярного поля, градиент**. Функция , определенная в области , называется *скалярным полем* на . Ключевое в этом определении то, что функция определена именно на области трехмерного пространства, то есть на открытом связном множестве. В большинстве приложений анализа считается, что является непрерывной дифференцируемой функцией. В частности, скалярным полем может являться множество плотностей малых объемов жидкостей в точках, где эти объемы находятся.

Распределение давлений в атмосфере также является скалярным полем – каждой точке поставлено в соответствие значение давления в ней. Из физики известно, что направление наибольшего роста давления в системе является направлением, обратно которому действуют силы (следует из третьего закона Ньютона). То же самое справедливо и для потенциала электрического поля – электрические силы действуют всегда в направлении, обратном наибольшему росту этого потенциала. Отсюда возникает задача определения направления наибольшего роста скалярного поля.

Рост скалярного поля при смещении из точки в точку можно охарактеризовать разностью , отнесенной к расстоянию между точками:

Наибольший рост соответствует максимуму этой функции относительно переменных . Найдем стационарные точки функции . Для удобства расчетов введем новые переменные:

в которых частные производные функции   
 будут выглядеть так:

Таким образом, в стационарной точке , то есть частная производная совпадает с ростом скалярного поля. Параметры в стационарной точке определяются из условий и .

Вычисляя вторые производные и второй дифференциал, получим:

(сделайте это самостоятельно) и, так как то знак второго дифференциала функции совпадает со знаком второго дифференциала функции .

Будем характеризовать направление наибольшего роста скалярного поля вектором , длина которого равна величине этого изменения, а направление совпадает с направлением изменения. Тогда, согласно проведенному рассмотрению, модуль искомого вектора будет равен а направление определяется условиями

в точке . Запишем эти условия в декартовых координатах

получим (проверьте!)

Из первого равенства следует, что первая и вторая декартовы координаты (то есть, и ) искомого вектора пропорциональны и , соответственно:

Подставив это во второе равенство и сделав алгебраические преобразования, получим (проверьте!)

Таким образом, координаты вектора , равны

где коэффициент пропорциональности следует определить из условия

Имеем:

Сравнивая, находим , то есть

Вектор с такими координатами уже встречался нам ранее (см. формулу (3.3.1)), только для случая произвольной размерности: В случае 3-мерного пространства вектор называется *градиентом* скалярного поля . Его физический смысл ясен из его построения: модуль равен величине максимального увеличения скалярного поля в точке, а направление совпадает с направлением этого изменения.

**Пример 3.5.1**. *Найдем направление и величину максимального изменения скалярного поля в точке*

Выпишем частные производные функции :

Значит, вектор градиента есть

Направление максимального изменения скалярного поля характеризуется единичным вектором , который получается нормированием вектора градиента на 1. Величина изменения в этом направлении есть модуль градиента в заданной точке:

□

**Производная по направлению**. Помимо направления и величины максимального изменения скалярного поля в заданной точке, в инженерных и физических задачах, а также в задачах моделирования, часто возникают ситуации, когда требуется определить скорость роста скалярного поля в заданной точке в заданном направлении. Это можно сделать, зная градиент скалярного поля.

Рост в заданном направлении будет характеризоваться числом, а не вектором (так как направление уже задано). Это число может быть как положительным, так и отрицательным (если в заданном направлении поле убывает). Оно может также равняться нулю, если в этом направлении поле не меняется. Поэтому естественно для характеристики изменения в заданном направлении использовать скалярное произведение единичного вектора в заданном направлении на вектор градиента. Такая конструкция удовлетворяет всем приведенным требованиям. Величина

называется *производной по направлению* скалярного поля . Она является количественной характеристикой изменения скалярного поля в заданном направлении.

**Пример 3.5.2**. *Найдем производную по направлению скалярного поля в точке*

Сначала найдем градиент скалярного поля в указанной точке:

Подставим в формулу :

□

### Упражнения

**3.4.1 Найдите градиент скалярного поля в точке :**

а) ; б) ; в) ;

г)

**3.4.2 Найдите производную в направлении**  **в точке** **от** **скалярного поля:**

а) ; б) ; в) ; г)

# Заключение

На этом заканчивается первая часть учебного пособия. Успешное изучение материала этой части возможно только при условии решения всех примеров и упражнений, приведенных здесь, самостоятельно. Кроме того, для приобретения навыков решения задач, требуется решить не менее 150 задач из разделов, включенных в настоящее пособие. Их следует взять из других источников (см. Библиографический список).

Усвоение приведенного здесь материала и навыки его практического применения считаются безусловно необходимыми для изучения дальнейших разделов математического анализа и специальных дисциплин.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сергиенко Е.Н. Комплексные числа и многочлены: учебное пособие / Е.Н. Сергиенко. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. – 96 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1 / Н. С. Пискунов. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 416 с.
3. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 16-е изд. – М.: Лань, 2012. – 736 с.
4. Сборник задач по математике для вузов, т. 2 / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.

1. Направление характеризуется выбором значений элементарных приращений аргументов [↑](#footnote-ref-1)